

Apprentissage par dictionnaires de diagrammes de persistance

Julie Delon et Julien Tierny

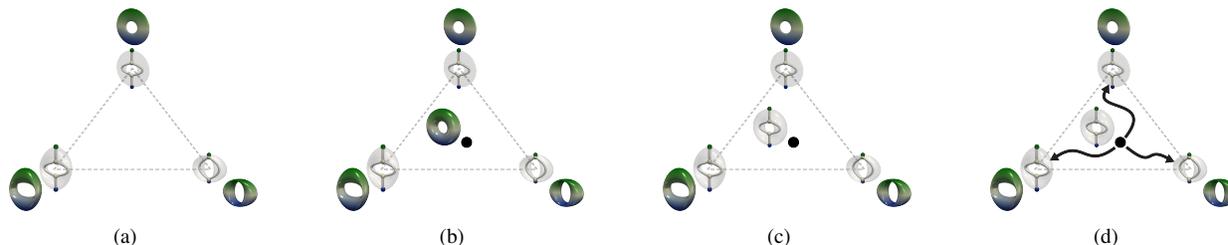


FIGURE 1. Le sujet en une image – (a) L’analyse topologique de données permet de calculer des représentations structurelles concises de données complexes, comme le graphe de Reeb dans cet exemple (squelette blanc). Etant donné une base de jeux de données (3 tores de couleurs dans cet exemple), il est fréquent dans les applications de ne stocker que la représentation topologique (le graphe de Reeb) afin de réduire l’espace de stockage requis, tout en permettant des analyses sophistiquées a posteriori. Ainsi, chaque nouveau jeu de données (b) est tout d’abord réduit sous une forme topologique (c). Pour réduire encore davantage l’espace de stockage requis, nous souhaitons dans ce stage concevoir et mettre en oeuvre des approches par dictionnaires (d) permettant d’exprimer toute nouvelle représentation topologique (au centre) par combinaison d’exemples connus (sommets du triangle pointillé), appelés *atomes*. En particulier, nous nous intéresserons dans le cadre de ce stage au diagramme de persistance (signature topologique plus simple que le graphe de Reeb) et considérerons des applications à la réduction de dimension, au sous-échantillonnage temporel ou encore à la comparaison de séquences de signatures topologiques.

1 CONTEXTE

L’analyse topologique de données (TDA) [9, 14, 38, 47, 48] est une thématique à cheval entre informatique et mathématiques appliquées, qui propose d’extraire, de mesurer et de comparer des informations structurelles cachées au sein de données complexes. Elle repose sur des concepts de topologie [36] documentés dans des livres de référence [14] et connaît un essor important depuis quelques années, dû principalement à ses succès récents en *data science* [13, 38, 48] et en *machine learning* [8, 12], ainsi qu’aux développements open-source récents la mettant en oeuvre [1, 51].

L’analyse topologique de données repose aujourd’hui sur une boîte à outils de représentations topologiques de données (comme le diagramme de persistance [14, 15], le graphe de Reeb [20–23, 39, 53], le complexe de Morse-Smale [17, 25, 33]) dont la concision et la pertinence pratique ont été documentées dans de nombreuses applications, comme en imagerie médicale [2, 7], en biologie cellulaire [26], en mécanique des fluides [6, 10, 19, 29, 44, 49], en physique des matériaux [16, 27, 32, 43], en combustion [4, 5, 24, 31], en chimie moléculaire [3, 18, 37], en astrophysique [42, 46], en traitement de surfaces [50, 52, 54, 57], en compression [45] ou encore en monitoring de simulations numériques haute-performance [40].

Comme illustré Figure 1(a), dans les applications, les données sont parfois stockées sur disque uniquement sous la forme de leur représentation topologique (par exemple le graphe de Reeb), afin de réduire l’espace de stockage requis, tout en permettant des analyses sophistiquées a posteriori. Ainsi, chaque nouveau jeu de données (Figure 1(b)) est tout d’abord réduit sous une forme topologique (Figure 1(c)). Dans ce stage, nous souhaitons réduire encore davantage l’espace de stockage requis en concevant et mettant en oeuvre des approches par dictionnaires (Figure 1(d)). L’idée consiste à exprimer chaque nouvelle représentation topologique (au centre, Figure 1(d)) comme une

combinaison d’exemples connus (appelés *atomes*, sommets du triangle, Figure 1(d)) et à ne sauvegarder le nouvel objet topologique que sous la forme des coefficients de mélange de cette combinaison. Ce type d’approche ouvrirait de nombreuses applications en analyse et visualisation de données, notamment pour la réduction de dimension, le sous-échantillonnage temporel ou encore la comparaison de séquences de signatures topologiques. Dans ce stage, nous nous focaliserons dans un premier temps sur le *diagramme de persistance* [14, 15] (représentation topologique simple), avant de considérer des représentations plus complexes en perspectives, par exemple en thèse de doctorat. Comme détaillé ci-dessous, les idées que nous souhaitons développer dans ce stage reposent sur des concepts d’analyse topologique de données associés à des outils issus du *transport optimal* [28, 34].

2 PROBLÈME SCIENTIFIQUE

Diagramme de persistance : Les données considérées en entrée sont fournies de manière générique sous la forme d’une fonction scalaire linéaire par morceaux $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, associant une valeur réelle à chaque sommet d’une triangulation \mathcal{M} (qui représente par exemple un objet 3D, Figure 1). En pratique, f représente dans les applications des estimations de densité [12], des niveaux de concentrations [16], des potentiels [18], des intensités [2], des températures [5], etc. Les sous-ensembles de niveau $f_{-\infty}^{-1}(i)$ sont définis comme la pré-image de l’intervalle ouvert $] -\infty, i[$ sur \mathcal{M} . Simplement, il s’agit de l’ensemble des points de l’objet au dessous d’une certaine valeur i . Quand i augmente, $f_{-\infty}^{-1}(i)$ change de topologie en un nombre fini de configurations : ses nombres de Betti [14, 58] (nombres de composantes connexes, de cycles indépendants, de cavités, etc...) changent sur des points singuliers, appelés points critiques (sphères de couleur, Figure 2). Chaque structure topologique de $f_{-\infty}^{-1}(i)$ est donc créée sur un premier point critique à une valeur i , puis détruite sur un second point critique à une valeur $j > i$. Le diagramme de persistance $\mathcal{D}(f)$ [11, 15] (Figure 2) est une représentation graphique de ce processus, où chaque classe d’homologie persistante (chaque structure topologique) est représentée par une barre verticale pour laquelle la cordonnée en abscisse correspond à la valeur $f(i)$ et les extrémités en ordonnées correspondent à i et j . La *persistance* de la classe est donnée par $|j - i|$. Dans ce diagramme, le bruit topologique apparaît donc sous la forme de petites barres, proche

- Julie Delon is with Université Paris Descartes, CNRS, MAP5 UMR 8145, France. E-mails: julie.delon@parisdescartes.fr
- Julien Tierny is with Sorbonne Université, CNRS, LIP6 UMR 7606, France. E-mails: julien.tierny@sorbonne-universite.fr

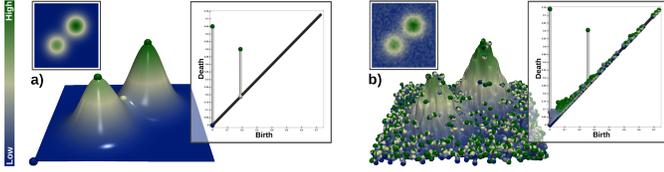


FIGURE 2. Le diagramme de persistance [14, 15] est une signature topologique de donnée simple, sur laquelle nous nous focaliserons pendant ce stage. Elle permet de réduire les données en entrée (image en niveau de gris, illustrée par un terrain, (a)) en un nuage de points 2D (diagramme sur la droite) représentant par un point chaque structure topologique (composante connexe, cycle, cavité, etc.) observée dans les données, en fonction de son importance dans les données (distance à la diagonale). Cette représentation permet de résumer de manière concise les structures principales présentes dans un jeu de données et présente des propriétés de stabilité intéressante en présence de bruit (b), où les structures bruitées vont typiquement être localisées près de la diagonale.

de la diagonale ($|j - i| \rightarrow 0$), voir [47].

Distance de Wasserstein entre diagrammes : Dans un diagramme, la distance entre deux points a et b (deux sphères, Figure 2) peut être donnée par la norme L_p (où 2 est une valeur usuelle du paramètre p) :

$$d_p(a, b) = \sqrt[p]{(a_x - b_x)^p + (a_y - b_y)^p} \quad (1)$$

Ensuite, la distance de Wasserstein entre deux diagrammes $\mathcal{D}(f)$ et $\mathcal{D}(g)$, notée d_p^W , est donnée par :

$$d_p^W(\mathcal{D}(f), \mathcal{D}(g)) = \min_{\phi \in \Phi} \sqrt[p]{\sum_{x \in \mathcal{D}(f)} (d_p(x, \phi(x)))^p} \quad (2)$$

où Φ représente l'ensemble des mises en correspondance possibles entre les structures des diagrammes $\mathcal{D}(f)$ et $\mathcal{D}(g)$ (incluant les possibles projections des structures de $\mathcal{D}(f)$ sur la diagonale de $\mathcal{D}(g)$ et réciproquement). Simplement, cette mesure repose sur une mise en correspondance optimale entre les barres des diagrammes, et mesure ensuite la distance entre diagrammes comme la somme des distances entre barres mises en correspondance par ϕ . Cette distance peut être calculée rapidement, de manière exacte [35, 44] ou approchée [30, 56].

Dictionnaires de diagrammes : Etant donné un ensemble $\mathcal{F} = \{\mathcal{D}(f_1), \mathcal{D}(f_2), \dots, \mathcal{D}(f_N)\}$ de diagrammes de persistance, il est possible d'introduire un *barycentre de Wasserstein* de l'ensemble, comme étant sa moyenne de Fréchet :

$$\mathcal{D}^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \arg \min_{\mathcal{D} \in \mathbb{D}} \sqrt[p]{\sum_{\mathcal{D}(f_i) \in \mathcal{F}} \alpha_i d_p^W(\mathcal{D}, \mathcal{D}(f_i))^p} \quad (3)$$

Plusieurs algorithmes [55, 56] existent pour la minimisation de l'Équation 3, dans le cas où $p = 2$ et $\alpha_i = 1$ pour tout i , et des implémentations open-source sont disponibles [51].

Si l'on considère que \mathcal{F} est un dictionnaire, et les diagrammes $\mathcal{D}(f_i)$ en sont les atomes, alors exprimer un nouveau diagramme $\mathcal{D}(f)$ étant donné ce dictionnaire revient à trouver un jeu de *coefficients de mélange* $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)$ tel que :

$$(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*) = \arg \min_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N} d_p^W(\mathcal{D}(f), \mathcal{D}^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)). \quad (4)$$

Alors, tout nouveau diagramme $\mathcal{D}(f)$ peut être encodé de manière fiable, avec seulement un jeu de N coefficients (solutions de l'équation 4) et une version approchée de $\mathcal{D}(f)$ peut être reconstruite à la demande en estimant $\mathcal{D}^*(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_N^*)$ (Équation 3). Par ailleurs, afin d'améliorer la qualité de cette reconstruction, les atomes du dictionnaires peuvent également être optimisés, i.e. en faisant varier les

diagrammes $\mathcal{D}(f_1), \mathcal{D}(f_2), \dots, \mathcal{D}(f_N)$ dans l'espace des diagrammes \mathbb{D} (en s'écartant alors des exemples de départ fournis en entrée).

Dans ce stage, nous voulons explorer de manière pratique et théorique les différentes stratégies possibles d'optimisation des coefficients de mélange et des atomes du dictionnaire. Un point de départ possible consiste à dériver une approche existante pour l'apprentissage par dictionnaire basée sur le transport optimal entre images [41]. Nous étudierons aussi la possibilité de borner l'erreur de reconstruction.

3 PERSPECTIVES

Ce stage est proposé dans l'optique d'une poursuite en thèse de doctorat sur le thème de l'analyse topologique de données, dans le cadre du projet ERC *TORI* : <http://erc-tori.github.io/>.

De manière plus générale, ce stage et sa possible poursuite en thèse apporteront un bagage de compétences scientifiques et techniques pointues et recherchées dans le domaine de la *data science* et de l'analyse et de la visualisation de données (TDA, TTK [51], ParaView [59]). Il constitue donc une expérience fortement valorisable pour accéder à des fonctions R&D sur ces thèmes, dans le monde académique comme industriel (Kitware, EDF, Total, CEA, etc.).

4 ORGANISATION DU STAGE

Le stage pourra se dérouler selon les étapes suivantes :

1. Etudier la bibliographie existante sur :
 - l'analyse topologique de données [14, 47];
 - la distance de Wasserstein entre diagrammes [11, 30, 44];
 - les barycentres de Wasserstein de diagrammes [55, 56]
 - les approches par dictionnaire basées sur le transport optimal entre images [41]
2. Imaginer et mettre en oeuvre un algorithme d'optimisation de coefficients de mélange;
3. Imaginer et mettre en oeuvre un algorithme d'optimisation d'atomes;
4. Valider l'approche d'un point de vue expérimental sur une variété de jeux de données pratiques provenant de divers contextes applicatifs, notamment dans le cadre d'appariement de structures au cours du temps.

Les programmes d'expérimentation seront écrits en C++, sous la forme de modules pour la plate-forme open-source d'analyse topologique de données "*Topology ToolKit*" (TTK) [51] (intégrée à ParaView [59]).

Le stage peut durer de 16 à 24 semaines, selon les disponibilités du stagiaire, à partir du 5 Avril 2021. Il s'agit d'un stage rémunéré (gratification académique standard, prise en charge partielle des frais de transport).

5 PROFIL

Nous recherchons un(e) étudiant(e) très motivé(e)! Curiosité, ouverture d'esprit, créativité, et ténacité sont les aptitudes de caractère que nous recherchons. Ce stage s'adresse aux étudiants en dernière année de master en informatique ou mathématiques appliquées (et domaines connexes) ou aux étudiants en dernière année d'école d'ingénieurs. Le stagiaire devra être à l'aise avec la programmation en C++, ou motivé pour le devenir. Un intérêt pour la 3D, la géométrie, la topologie et plus généralement pour les mathématiques et l'informatique est requis.

6 LIEU

Ce stage aura lieu au laboratoire d'informatique (LIP6) de Sorbonne Université, en plein coeur de Paris (arrêt Jussieu, lignes 7 et 10). Il sera encadré par Julien Tierny (chercheur au CNRS, expert en méthodes topologiques pour l'analyse et la visualisation de données, <https://julien-tierny.github.io/>) et Julie Delon (professeure à l'Université de Paris, up5.fr/delon, experte en transport optimal pour l'imagerie).

7 CANDIDATURES

Nous invitons les candidat(e)s à nous faire parvenir leur lettre de candidature accompagnée d'un CV mis à jour à Julien Tierny et Julie Delon (julien.tierny@sorbonne-universite.fr, julie.delon@u-paris.fr). Nous vous encourageons à nous contacter par email pour toute question ou pour discuter davantage du sujet.

RÉFÉRENCES

- [1] T. Bin Masood, J. Budin, M. Falk, G. Favelier, C. Garth, C. Gueunet, P. Guillou, L. Hofmann, P. Hristov, A. Kamakshidasan, C. Kappe, P. Klacansky, P. Laurin, J. Levine, J. Lukaszczuk, D. Sakurai, M. Soler, P. Stenetteg, J. Tierny, W. Usher, J. Vidal, and M. Wozniak. An Overview of the Topology Toolkit. In *TopoInVis*, 2019.
- [2] A. Bock, H. Doraiswamy, A. Summers, and C. Silva. Topoangler : Interactive topology-based extraction of fishes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2017.
- [3] R. A. Boto, J. C. Garcia, J. Tierny, and J.-P. Piquemal. Interpretation of the reduced density gradient. *Molecular Physics*, 2016.
- [4] P. Bremer, G. Weber, J. Tierny, V. Pascucci, M. Day, and J. Bell. A topological framework for the interactive exploration of large scale turbulent combustion. In *Proc. of IEEE eScience*, 2009.
- [5] P. Bremer, G. Weber, J. Tierny, V. Pascucci, M. Day, and J. Bell. Interactive exploration and analysis of large scale simulations using topology-based data segmentation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2011.
- [6] T. Bridel-Bertomeu, B. Fovet, J. Tierny, and F. Vivodtzev. Topological Analysis of High Velocity Turbulent Flow. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization (posters)*, 2019.
- [7] H. Carr, J. Snoeyink, and M. van de Panne. Simplifying flexible isosurfaces using local geometric measures. In *IEEE VIS*, 2004.
- [8] F. Chazal, L. Guibas, S. Oudot, and P. Skraba. Persistence-based clustering in Riemannian manifolds. *Journal of the ACM*, 2013.
- [9] F. Chazal and J. Tierny. Topological data analysis, online class. <http://lip6.fr/Julien.Tierny/topologicalDataAnalysisClass.html>.
- [10] F. Chen, H. Obermaier, H. Hagen, B. Hamann, J. Tierny, and V. Pascucci. Topology analysis of time-dependent multi-fluid data using the reeb graph. *Computer Aided Geometric Design*, 2013.
- [11] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. Stability of persistence diagrams. In *Symp. on Comp. Geom.*, 2005.
- [12] R. Cotsakis, J. Shaw, J. Tierny, and J. A. Levine. Implementing Persistence-Based Clustering of Point Clouds in the Topology Toolkit. In *TopoInVis Book*, 2020.
- [13] H. Doraiswamy, J. Tierny, P. J. S. Silva, L. G. Nonato, and C. Silva. TopoMap : A 0-dimensional Homology Preserving Projection of High-Dimensional Data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2020.
- [14] H. Edelsbrunner and J. Harer. *Computational Topology : An Introduction*. American Mathematical Society, 2009.
- [15] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Disc. Compu. Geom.*, 2002.
- [16] G. Favelier, C. Gueunet, and J. Tierny. Visualizing ensembles of viscous fingers. In *IEEE SciVis Contest*, 2016.
- [17] R. Forman. A user's guide to discrete Morse theory. *Adv. in Math.*, 1998.
- [18] D. Guenther, R. Alvarez-Boto, J. Contreras-Garcia, J.-P. Piquemal, and J. Tierny. Characterizing molecular interactions in chemical systems. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2014.
- [19] D. Guenther, J. Salmon, and J. Tierny. Mandatory critical points of 2D uncertain scalar fields. *Computer Graphics Forum (Proc. of EuroVis)*, 2014.
- [20] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Contour forests : Fast multi-threaded augmented contour trees. In *IEEE Lдав*, 2016.
- [21] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Merge Trees with Fibonacci Heaps. In *IEEE Lдав*, 2017.
- [22] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Contour Trees with Fibonacci Heaps. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2019. Accepted.
- [23] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Reeb Graphs with Dynamic ST-Trees. In *Eurographics Symposium on Parallel Graphics and Visualization*, 2019.
- [24] A. Gyulassy, P. Bremer, R. Grout, H. Kolla, J. Chen, and V. Pascucci. Stability of dissipation elements : A case study in combustion. *Computer Graphics Forum (Proc. of EuroVis)*, 2014.
- [25] A. Gyulassy, P. T. Bremer, B. Hamann, and V. Pascucci. A practical approach to morse-smale complex computation : Scalability and generality. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2008.
- [26] A. Gyulassy, D. Guenther, J. A. Levine, J. Tierny, and V. Pascucci. Conforming morse-smale complexes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2014.
- [27] A. Gyulassy, A. Knoll, K. Lau, B. Wang, P. Bremer, M. Papka, L. A. Curtiss, and V. Pascucci. Interstitial and interlayer ion diffusion geometry extraction in graphitic nanosphere battery materials. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2015.
- [28] L. Kantorovich. On the translocation of masses. *AS URSS*, 1942.
- [29] J. Kasten, J. Reininghaus, I. Hotz, and H. Hege. Two-dimensional time-dependent vortex regions based on the acceleration magnitude. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2011.
- [30] M. Kerber, D. Morozov, and A. Nigmatov. Geometry helps to compare persistence diagrams. *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 22, 2016. Article No. 1.4.
- [31] D. E. Laney, P. Bremer, A. Mascarenhas, P. Miller, and V. Pascucci. Understanding the structure of the turbulent mixing layer in hydrodynamic instabilities. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2006.
- [32] J. Lukaszczuk, G. Aldrich, M. Steptoe, G. Favelier, C. Gueunet, J. Tierny, R. Maciejewski, B. Hamann, and H. Leitte. Viscous fingering : A topological visual analytic approach. In *Physical Modeling for Virtual Manufacturing Systems and Processes*, 2017.
- [33] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton U. Press, 1963.
- [34] G. Monge. "mémoire sur la théorie des déblais et des remblais". *Académie Royale des Sciences de Paris*,.
- [35] D. Morozov. Dionysus. <http://www.mrzv.org/software/dionysus>, 2010. Accessed : 2016-09-15.
- [36] MyWhyU. A humorous look at the topology of curved space. <https://www.youtube.com/watch?v=p2ofJPh2yMw&list=PL09E9E697F585A58C>.
- [37] M. Olejniczak, A. S. P. Gomes, and J. Tierny. A Topological Data Analysis Perspective on Non-Covalent Interactions in Relativistic Calculations. *International Journal of Quantum Chemistry*, 2019.
- [38] V. Pascucci, X. Tricoche, H. Hagen, and J. Tierny. *Topological Methods in Data Analysis and Visualization : Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 2010.
- [39] G. Reeb. Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique. *Acad. des Sci.*, 1946.
- [40] E. Santos, J. Tierny, A. Khan, B. Grimm, L. Lins, J. Freire, V. Pascucci, C. Silva, S. Klasky, R. Barreto, and N. Podhorski. Enabling advanced visualization tools in a web-based simulation monitoring system. In *Proc. of IEEE eScience*, 2009.
- [41] M. A. Schmitz, M. Heitz, N. Bonneel, F. M. N. Mboula, D. Coeurjolly, M. Cuturi, G. Peyré, and J. Starck. Wasserstein dictionary learning : Optimal transport-based unsupervised non-linear dictionary learning. *CoRR*, abs/1708.01955, 2017.
- [42] N. Shivashankar, P. Pranav, V. Natarajan, R. van de Weygaert, E. P. Bos, and S. Rieder. Felix : A topology based framework for visual exploration of cosmic filaments. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2016. <http://vgl.serc.iisc.ernet.in/felix/index.html>.
- [43] M. Soler, M. Petitfrere, G. Darche, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Ranking Viscous Finger Simulations to an Acquired Ground Truth with Topology-Aware Matchings. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization*, 2019.
- [44] M. Soler, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Lifted Wasserstein matcher for fast and robust topology tracking. In *Proc. of IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization*, 2018.
- [45] M. Soler, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Topologically controlled lossy compression. In *Proc. of IEEE PacificVis*, 2018.
- [46] T. Sousbie. The persistent cosmic web and its filamentary structure : Theory and implementations. *Royal Astronomical Society*, 2011. <http://www2.iap.fr/users/sousbie/web/html/indexd41d.html>.
- [47] J. Tierny. Introduction to topological data analysis. <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01581941/file/manuscript.pdf>.
- [48] J. Tierny. *Topological Data Analysis for Scientific Visualization*. Springer,

- 2018.
- [49] J. Tierny and H. Carr. Jacobi fiber surfaces for bivariate Reeb space computation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2016.
 - [50] J. Tierny, J. Daniels, L. G. Nonato, V. Pascucci, and C. Silva. Interactive quadrangulation with Reeb atlases and connectivity textures. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2012.
 - [51] J. Tierny, G. Favelier, J. A. Levine, C. Gueunet, and M. Michaux. The Topology ToolKit. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2017. <https://topology-tool-kit.github.io/>.
 - [52] J. Tierny, D. Guenther, and V. Pascucci. Optimal general simplification of scalar fields on surfaces. In *Topological and Statistical Methods for Complex Data*. Springer, 2014.
 - [53] J. Tierny, A. Gyulassy, E. Simon, and V. Pascucci. Loop surgery for volumetric meshes : Reeb graphs reduced to contour trees. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2009.
 - [54] J. Tierny and V. Pascucci. Generalized topological simplification of scalar fields on surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2012.
 - [55] K. Turner, Y. Mileyko, S. Mukherjee, and J. Harer. Fréchet Means for Distributions of Persistence Diagrams. *Disc. Compu. Geom.*, 2014.
 - [56] J. Vidal, J. Budin, and J. Tierny. Progressive Wasserstein Barycenters of Persistence Diagrams. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2019.
 - [57] A. Vintescu, F. Dupont, G. Lavoué, P. Memari, and J. Tierny. Conformal factor persistence for fast hierarchical cone extraction. In *Eurographics (short papers)*, 2017.
 - [58] Wikipedia. Betti numbers. https://en.wikipedia.org/wiki/Betti_number.
 - [59] Wikipedia. ParaView. <https://en.wikipedia.org/wiki/ParaView>.