



**SORBONNE  
UNIVERSITÉ**



---

## Offre de stage de M2 : Étude et représentations d'ensembles fractals dans la sphère de dimension 3

### Conditions

Cette offre concerne un stage de 6 mois dans les locaux de Sorbonne Université, Campus de Jussieu (Paris, Métro Jussieu). Il est gratifié à hauteur d'environ 500 euros par mois.

### Encadrants

Ce stage est co-encadré par Antonin Guilloux (IMJ-PRG et OURAGAN) et Julien Tierny (LIP6).

### Description du sujet

Ce sujet est à l'interface entre mathématiques et informatique et son thème général est la visualisation mathématique (représentation graphique d'objets mathématiques complexes).

Les ensembles fractals de la dynamique complexe donnent lieu à des représentations fascinantes et bien connues. On pense bien sûr à l'iconique ensemble de Mandelbrot<sup>1</sup>, aux différents ensembles de Julia<sup>2</sup> ou les moins connus ensembles limites kleinéens<sup>3</sup>. Ces derniers sont en réalité des sous-ensembles de la sphère  $\mathbf{S}^2$  de dimension 2, et liés à des groupes de matrices complexes de taille  $2 \times 2$ . Dès l'origine de ces objets, comme le décrivent les trois articles en lien, leur représentation fidèle est un défi. Elle permet de mieux les comprendre et d'avancer dans leur étude mathématique.

Depuis quelques années, notre savoir expérimental sur des objets analogues dans la sphère  $\mathbf{S}^3$  grandit, et nous pouvons assez bien calculer des ensembles limites. Un prototype interactif en ligne<sup>4</sup> (Figure 1) présente le résultat préliminaire de ces calculs : on y voit, pour chaque point (orange) dans un espace de paramètres dans le plan, la représentation d'un ensemble limite associé. Un des défis mathématiques est de comprendre la déformation de ces ensembles limites quand on bouge dans l'espace des paramètres.

On peut donner trois exemples de ces ensembles (représentés par leurs projection selon les 3 axes) qui montrent leur diversité. Les plus simples sont des cercles à peine déformés (Figure 2). D'autres montrent une richesse géométrique qu'il serait très intéressant d'explorer (Figure 3). D'autres enfin montrent les limitations de la représentation actuelle (Figure 4) : il n'est même pas clair que nous ne soyons pas en train de représenter un ensemble dense dans certains domaines!

Cependant, même une fois l'ensemble limite calculé brutalement, il reste un défi de représentation et de compréhension des données : comment apprécier la nature fractale en 3D? peut-on accéder numériquement à des informations de type géométrique (plan tangent, dimension locale, etc)?

- 
1. <https://images.math.cnrs.fr/L-ensemble-de-Mandelbrot>
  2. <https://images.math.cnrs.fr/Une-balade-parmi-les-ensembles-de-Julia>
  3. <https://images.math.cnrs.fr/Un-ensemble-limite.html>
  4. <https://webusers.imj-prg.fr/~antonin.guilloux/EnsemblesLimitesCR/>

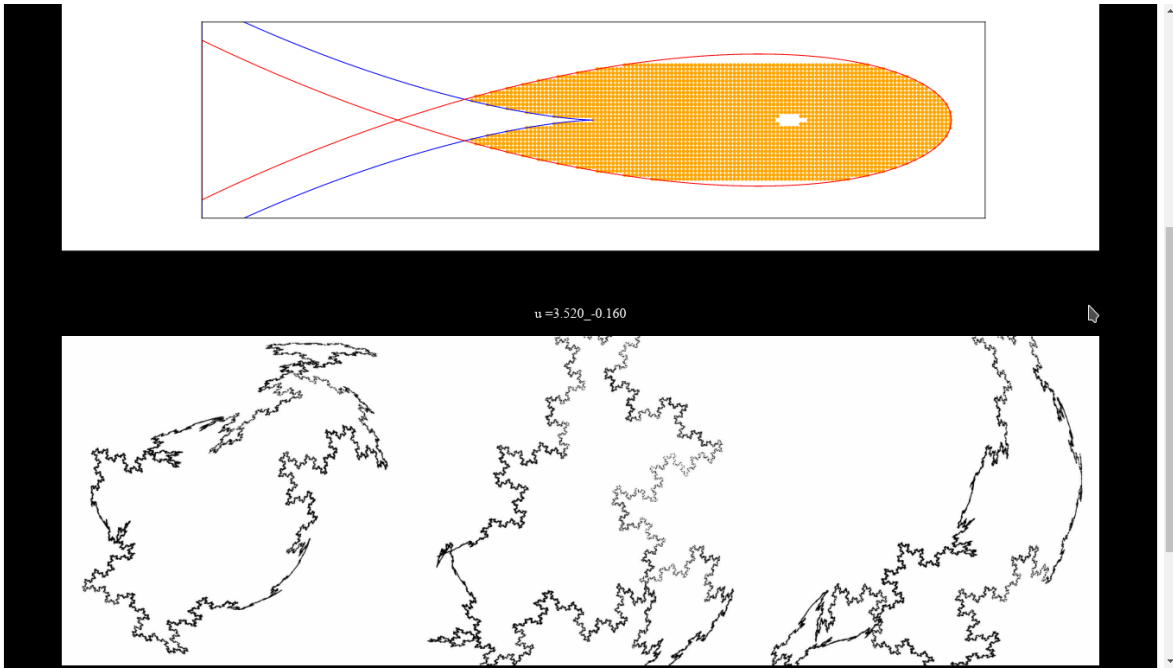


FIGURE 1 – Prototype en ligne pour la visualisation et l’exploration interactive d’ensembles limites.  
<https://webusers.imj-prg.fr/~antonin.guilloux/EnsemblesLimitesCR/>

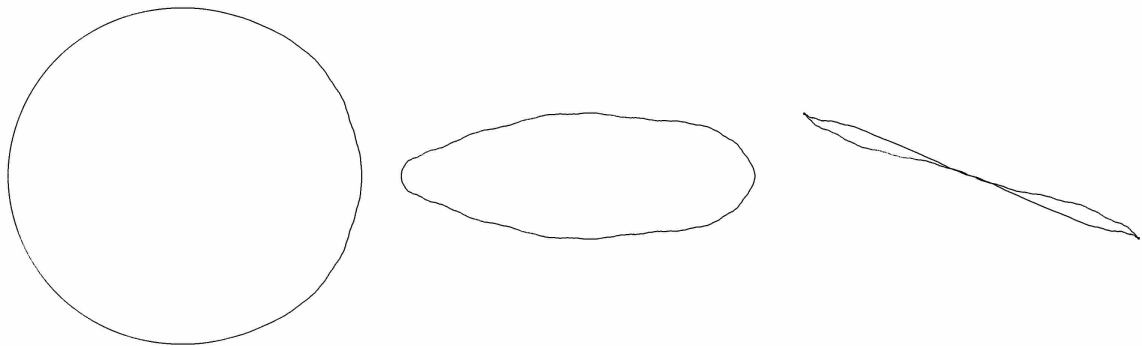


FIGURE 2 – Un ensemble limite très simple

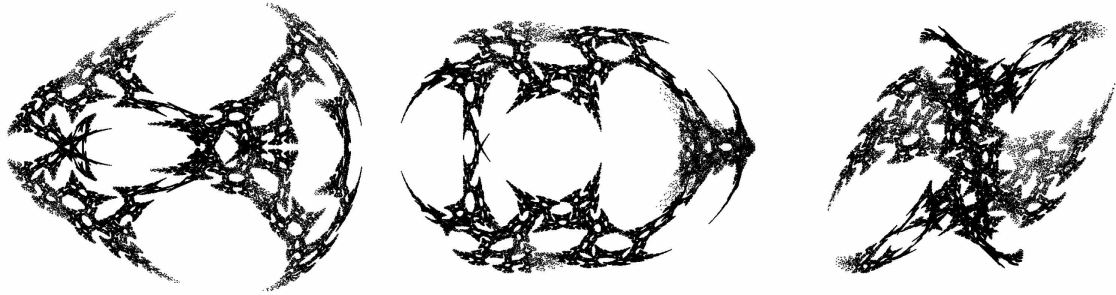


FIGURE 3 – Un ensemble limite géométriquement riche

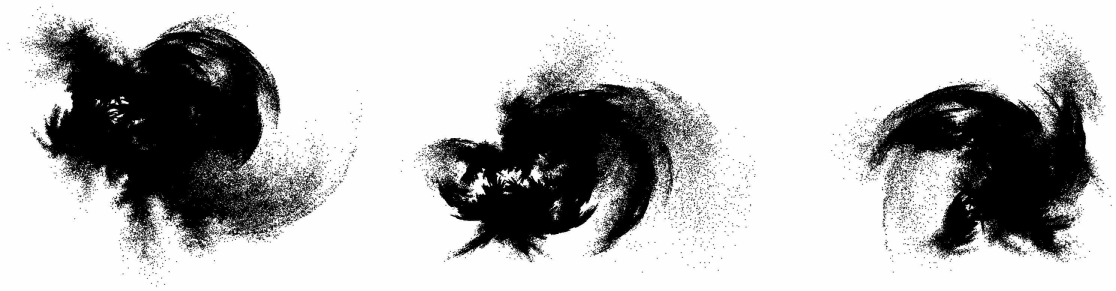


FIGURE 4 – Un ensemble limite mal compris et représenté

## Objectifs du stage

L'objectif du stage est donc double.

Dans un premier temps (problème expérimental), il s'agira de permettre une visualisation 3D des ensembles pré-calculés optimisée pour leurs caractéristiques. Il s'agit là d'un objectif d'implémentation/prototypage. Pour cela, nous souhaiterions développer un prototype plus avancé en terme de visualisation, exploitant l'écosystème VTK<sup>5</sup>, VTK-js<sup>6</sup>, ParaView<sup>7</sup>, ParaView-Cinema<sup>8</sup>, ParaView-Web<sup>9</sup> voire TTK<sup>10</sup>.

Dans un deuxième temps (problème de recherche en amont), il faudra analyser les informations géométriques pertinentes qu'on peut obtenir et concevoir de nouveaux algorithmes pour les calculer et les représenter graphiquement. Parmi les informations pertinentes, on peut citer :

- La dimension locale (attention, ces objets ne sont pas en général des variétés!).
- Les plans tangents (quand la notion a du sens).
- Des invariants plus adaptés au caractère fractal, notamment la dimension de Hausdorff.
- Des invariants directement liés à la géométrie globale du problèmes, par exemple des calculs d'invariants de Cartan.

Une partie de l'étude sera de déterminer lesquels de ces informations sont les plus pertinentes pour prioriser leur calcul.

## Profil

Nous recherchons un.e étudiant.e très motivé.e! Curiosité, ouverture d'esprit, créativité, et ténacité sont les aptitudes de caractère que nous recherchons. Ce stage s'adresse soit *(i)* aux étudiant.es de master en mathématiques (maîtrisant déjà la programmation) soit *(ii)* aux étudiants de master en informatiques (ou écoles d'ingénieurs). Le ou la stagiaire devra être à l'aise avec la programmation (Python et/ou C++). Un fort intérêt pour la géométrie, la topologie et plus généralement pour les mathématiques et l'informatique est requis.

---

5. <http://www.vtk.org>

6. <https://kitware.github.io/vtk-js/index.html>

7. <http://www.paraview.org>

8. <https://blog.kitware.com/paraview-cinema-an-image-based-approach-to-extreme-scale-data-analysis/>

9. <https://www.paraview.org/web/>

10. <https://topology-tool-kit.github.io/>