

# Métriques entre diagrammes de persistance dynamiques

Julien Tierny

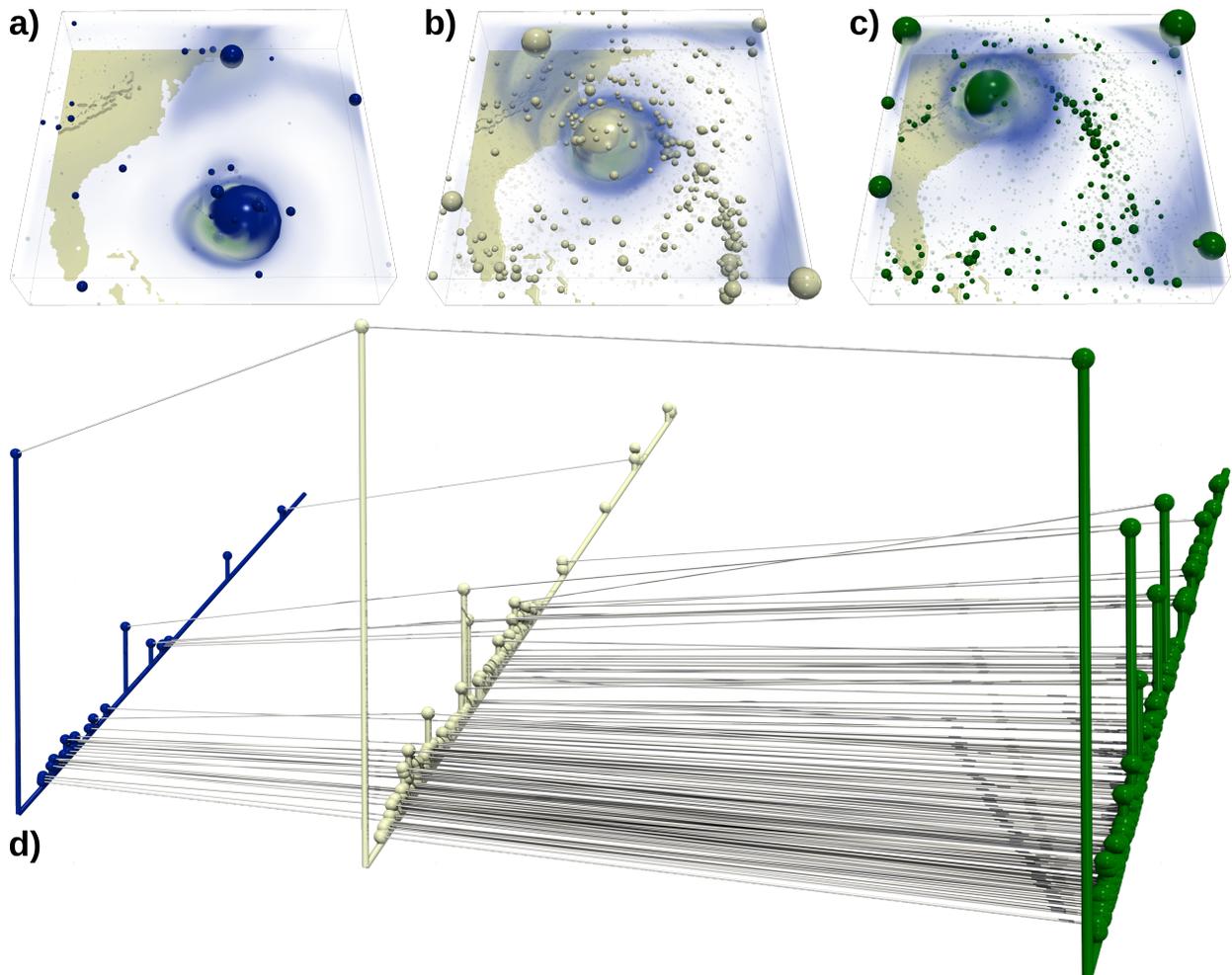


Fig. 1. Le sujet en une image – L'analyse topologique de données permet de calculer des signatures structurales concises (comme le diagramme de persistance) à partir de données complexes. Ces signatures facilitent ensuite la comparaison et l'analyse [44, 63, 64]. Dans de nombreuses applications, les données évoluent au cours du temps et il devient donc nécessaire de concevoir des outils pour analyser ces évolutions temporelles. Dans cet exemple, chaque pas de temps de la simulation de l'ouragan Isabel (a, b, c) donne lieu à un diagramme de persistance (de même couleur, d) décrivant l'amplitude de vélocité du vent. Ainsi, l'ensemble de la simulation donne lieu à un diagramme de persistance dynamique, i.e. variant dans le temps (d, du bleu vers le vert). Pour comparer ce diagramme dynamique à un autre, il devient donc nécessaire de définir des métriques dédiées, calculables et idéalement stables, entre diagrammes de persistance dynamiques. C'est l'objet de ce stage, où nous étudierons l'extension de métriques existantes entre diagrammes statiques (basées sur le transport optimal [30, 38]) à l'aide de techniques de déformation temporelle dynamique [35, 40]. Ce stage est proposé dans l'optique d'une poursuite en thèse de doctorat.

## 1 CONTEXTE

L'analyse topologique de données (TDA) [9, 16, 43, 54, 55] est une thématique à cheval entre informatique et mathématiques appliquées, qui propose d'extraire, de mesurer et de comparer des informations structurales cachées au sein de données complexes. Elle repose sur des concepts de topologie [41] documentés dans des livres de référence [16]

et connaît un essor important depuis quelques années, dû principalement à ses succès en analyse et visualisation de données [43, 55], en data science [15], en machine learning [8, 14], ainsi qu'aux développements open-source récents la mettant en oeuvre [1, 18, 58].

L'analyse topologique de données repose aujourd'hui sur une boîte à outil de représentations topologiques de données (comme le diagramme de persistance [16, 17, 65, 66], le graphe de Reeb [23–26, 46, 60], le complexe de Morse-Smale [20, 28, 37]) dont la concision et la pertinence pratique ont été documentées dans de nombreuses applications, comme en imagerie médicale [2, 7], en biologie cellulaire [29], en mécanique des fluides [6, 10, 22, 31, 51, 56], en physique des matériaux [19, 34, 50],

• Julien Tierny is with Sorbonne Université, CNRS, LIP6 UMR 7606, France. E-mails: julien.tierny@sorbonne-universite.fr.

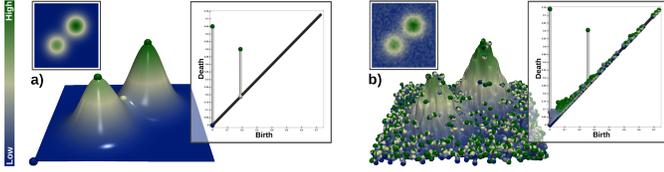


Fig. 2. Le diagramme de persistance [16, 17] est une signature topologique de donnée simple, sur laquelle nous nous focaliserons pendant ce stage. Elle permet de réduire les données en entrée (image en niveau de gris, illustrée par un terrain, (a)) en un nuage de points 2D (diagramme sur la droite) représentant par un point chaque structure topologique (composante connexe, cycle, cavité, etc.) observée dans les données, en fonction de son importance dans les données (distance à la diagonale). Cette représentation permet de résumer de manière concise les structures principales présentes dans un jeu de données et présente des propriétés de stabilité intéressante en présence de bruit (b), où les structures bruitées vont typiquement être localisées près de la diagonale.

en combustion [4, 5, 27, 33], en chimie moléculaire [3, 21, 42], en astrophysique [49, 53], en traitement de surfaces [57, 59, 61, 67], en compression [52] ou encore en monitoring de simulations numériques haute-performance [48].

Cependant, comme illustré Fig. 1, dans de nombreuses applications, les données varient dans le temps, donnant lieu à la notion de diagramme de persistance dynamique, i.e. qui varie également dans le temps (Fig. 1(d)). Il devient alors nécessaire de concevoir des outils d'analyse dédiés à ces diagrammes dynamiques. C'est l'objet de ce stage où nous nous focaliserons sur la définition de métriques entre diagrammes dynamiques, pour des applications d'évaluation de similarités entre jeux de données variant dans le temps. Comme détaillé ci-dessous, les idées que nous souhaitons développer dans ce stage reposent sur des concepts d'analyse topologique de données, associés à des outils issus du transport optimal [30, 38] et de la déformation temporelle dynamique [35, 40].

## 2 PROBLÈME SCIENTIFIQUE

**Diagrammes de persistance statiques:** Dans le cas statique, les données considérées en entrée sont fournies de manière générique sous la forme d'une fonction scalaire linéaire par morceaux  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , associant une valeur réelle à chaque sommet d'une triangulation  $\mathcal{M}$  (qui représente par exemple un objet 3D, Fig. 1). En pratique,  $f$  représente dans les applications des estimations de densité [14], des niveaux de concentrations [19], des potentiels [21], des intensités [2], des températures [5], etc. Les sous-ensembles de niveau  $f_{-\infty}^{-1}(i)$  sont définis comme la pré-image de l'intervalle ouvert  $] -\infty, i[$  sur  $\mathcal{M}$ . Simplement, il s'agit de l'ensemble des points de l'objet au dessous d'une certaine valeur  $i$ . Quand  $i$  augmente,  $f_{-\infty}^{-1}(i)$  change de topologie en un nombre fini de configurations: ses nombres de Betti [16, 68] (nombres de composantes connexes, de cycles indépendants, de cavités, etc...) changent sur des points singuliers, appelés points critiques (sphères de couleur, Fig. 2). Chaque structure topologique de  $f_{-\infty}^{-1}(i)$  est donc créée sur un premier point critique à une valeur  $i$ , puis détruite sur un second point critique à une valeur  $j > i$ . Le diagramme de persistance  $\mathcal{D}(f)$  [11, 17] (Fig. 2) est une représentation graphique de ce processus, où chaque classe d'homologie persistante (chaque structure topologique) est représentée par une barre verticale pour laquelle la cordonnée en abscisse correspond à la valeur  $i$  et les extrémités en ordonnées correspondent à  $i$  et  $j$ . La persistance de la classe est donnée par  $|j - i|$ . Dans ce diagramme, le bruit topologique apparaît donc sous la forme de petites barres, proche de la diagonale ( $|j - i| \rightarrow 0$ ), voir [54].

**Distance de Wasserstein entre diagrammes:** Dans un diagramme, la distance entre deux points  $a$  et  $b$  (deux sphères, Fig. 2) peut être donnée par la norme  $L_p$  (où 2 est une valeur usuelle du paramètre  $p$ ):

$$d_p(a, b) = \sqrt[p]{(a_x - b_x)^p + (a_y - b_y)^p}. \quad (1)$$

Ensuite, la distance de Wasserstein entre deux diagrammes  $\mathcal{D}(f)$  et  $\mathcal{D}(g)$ , notée  $d_p^W$ , est donnée par:

$$d_p^W(\mathcal{D}(f), \mathcal{D}(g)) = \min_{\phi \in \Phi} \sqrt[p]{\sum_{x \in \mathcal{D}(f)} (d_p(x, \phi(x)))^p}, \quad (2)$$

où  $\Phi$  représente l'ensemble de toutes les mises en correspondance possibles entre les structures du diagramme  $\mathcal{D}(f)$  et celle de  $\mathcal{D}(g)$  (diagonales comprises). Simplement, cette mesure repose sur une mise en correspondance optimale entre les barres des diagrammes, et mesure ensuite la distance entre diagrammes comme la somme des distances entre barres mises en correspondances par  $\phi$ . Cette distance peut être calculée rapidement, de manière exacte [39, 51] ou approchée [32, 64].

**Diagrammes de persistance dynamiques:** Dans le cas dynamique, les données varient dans le temps et sont fournies sous la forme d'une séquence  $\mathcal{S}_f$  de  $N$  fonctions linéaires par morceaux indexées par le temps  $\mathcal{S}_f = \{f_{t_1}, f_{t_2}, \dots, f_{t_N}\}$ , avec  $t_i < t_{i+1}, \forall i \in [1, N-1]$ . Ces  $N$  fonctions sont associées à une séquence  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  de  $N$  diagrammes de persistance, indexés par le temps:  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{D}(f_{t_1}), \mathcal{D}(f_{t_2}), \dots, \mathcal{D}(f_{t_N})\}$ . Afin d'interpoler continument cette séquence, nous considérons une séquence  $\mathcal{S}_{\phi}$  de  $N-1$  mises en correspondances  $\phi_i$  entre le diagramme  $\mathcal{D}(f_{t_i})$  et le diagramme  $\mathcal{D}(f_{t_{i+1}})$  (cylindres blancs transversaux, Fig. 1(d)). Cette séquence de mises en correspondance peut être obtenue lors de la construction des diagrammes [12] ou a posteriori, par exemple en minimisant Equation 2 pour chaque paire  $(\mathcal{D}(f_{t_i}), \mathcal{D}(f_{t_{i+1}}))$ .

**Métrie entre diagrammes dynamiques:** Pour définir un framework d'analyse statistique pour diagrammes de persistance dynamiques (à l'instar de ceux existant pour les diagrammes statiques [44, 63, 64]), un ingrédient essentiel est requis: une métrique permettant de comparer deux diagrammes dynamiques  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$  et  $\mathcal{S}_{\mathcal{D}'}$  (de tailles  $N$  et  $N'$ ). En particulier, il est nécessaire que la métrique soit calculable en pratique (en utilisant donc des algorithmes praticables) et il est souhaitable qu'elle présente des propriétés de stabilité en pratique. Une fois qu'une telle métrique est établie, un grand nombre d'applications et de perspectives deviennent possibles (comparaison, ranking, réduction de dimension, barycentres, clustering, etc). Dans certains cas triviaux où des hypothèses d'échantillonnage compatible ( $N = N'$ ) et de cohérence temporelle ( $t_i = t'_i \quad \forall i \in [1, N]$ ) sont satisfaites, la distance de Wasserstein (Equation 2) peut être intégrée directement (i.e. en sommant les distances entre paires de pas de temps [50]). Cependant, dans la majorité des cas pratiques, l'échantillonnage temporel est rarement identique entre deux diagrammes dynamiques. Par ailleurs, très souvent, il n'y a pas de cohérence temporelle significative entre les séquences et il devient nécessaire de considérer des transformations temporelles élastiques, afin de (*i*) recaler les séquences pour ensuite les (*ii*) comparer en intégrant la distance de Wasserstein. Dans ce stage, nous souhaitons explorer cette piste, en étudiant la possibilité d'étendre les techniques de déformation temporelle dynamique [35, 40] aux diagrammes de persistance dynamiques.

## 3 PERSPECTIVES

Ce stage est proposé dans l'optique d'une poursuite en thèse de doctorat sur le thème de l'analyse topologique de données, dans le cadre du projet ERC *TORI*: <http://erc-tori.github.io/>.

De manière plus générale, ce stage et sa poursuite en thèse apporteront un bagage de compétences scientifiques et techniques pointues et recherchées dans le domaine de l'analyse et de la visualisation de données (TDA, TTK [58], ParaView [69]). Il constitue donc une expérience fortement valorisable pour accéder à des fonctions R&D sur ces thèmes, dans le monde académique comme industriel (Kitware, EDF, Total, CEA, etc.).

## 4 ORGANISATION DU STAGE

Le stage pourra se dérouler selon les étapes suivantes:

1. Etudier la bibliographie existante sur:

- l'analyse topologique de données [16,54];
  - la distance de Wasserstein entre diagrammes [11,32,51,64];
  - la comparaison de structures temporelles [47,50]
  - la déformation temporelle dynamique [13,35,40]
2. Définir une métrique (à défaut une mesure de similarité) couplant distance de Wasserstein et déformation temporelle dynamique;
  3. Implémenter un algorithme de calcul de cette métrique;
  4. Etudier expérimentalement la performance de l'approche et sa pertinence quantitative (stabilité) et qualitative (précision de classification) sur des données synthétiques [45] ainsi que sur des benchmarks publics [36,44,62];
  5. Valider la pertinence de l'approche au travers d'une application, par exemple la réduction de dimension pour l'analyse de séquences temporelles.

Les programmes d'expérimentation seront écrits en C++, sous la forme de modules pour la plate-forme open-source d'analyse topologique de données "Topology ToolKit" (TTK) [58] (intégrée à ParaView [69]).

Le stage peut durer de 16 à 24 semaines, selon les disponibilités du stagiaire, à partir du 4 Avril 2022. Il s'agit d'un stage rémunéré (gratification académique standard, prise en charge partielle des frais de transport).

## 5 PROFIL

Nous recherchons un(e) étudiant(e) très motivé(e)! Curiosité, ouverture d'esprit, créativité, et ténacité sont les aptitudes de caractère que nous recherchons. Ce stage s'adresse aux étudiants en dernière année de master en informatique ou mathématiques appliquées (et domaines connexes) ou aux étudiants en dernière année d'école d'ingénieurs. Le stagiaire devra être à l'aise avec la programmation en C++, ou motivé pour le devenir. Un intérêt pour la géométrie, la topologie et plus généralement pour les mathématiques et l'informatique est requis.

## 6 LIEU

Ce stage aura lieu au laboratoire d'informatique (LIP6) de Sorbonne Université, en plein coeur de Paris (arrêt Jussieu, lignes 7 et 10). Il sera encadré par Julien Tierny (chercheur au CNRS, expert en méthodes topologiques pour l'analyse et la visualisation de données, <https://julientierny.github.io/>).

## 7 CANDIDATURES

Nous invitons les candidat(e)s à nous faire parvenir leur lettre de candidature accompagnée d'un CV à jour à Julien Tierny ([julien.tierny@sorbonne-universite.fr](mailto:julien.tierny@sorbonne-universite.fr)). Nous vous encourageons à nous contacter par email pour toute question ou pour discuter d'avantage du sujet.

## REFERENCES

- [1] T. Bin Masood, J. Budin, M. Falk, G. Favelier, C. Garth, C. Gueunet, P. Guillou, L. Hofmann, P. Hristov, A. Kamakshidasan, C. Kappe, P. Klacansky, P. Laurin, J. Levine, J. Lukaszczuk, D. Sakurai, M. Soler, P. Steneteg, J. Tierny, W. Usher, J. Vidal, and M. Wozniak. An Overview of the Topology ToolKit. In *TopoInVis*, 2019.
- [2] A. Bock, H. Doraiswamy, A. Summers, and C. Silva. Topoangler: Interactive topology-based extraction of fishes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2017.
- [3] R. A. Boto, J. C. Garcia, J. Tierny, and J.-P. Piquemal. Interpretation of the reduced density gradient. *Molecular Physics*, 2016.
- [4] P. Bremer, G. Weber, J. Tierny, V. Pascucci, M. Day, and J. Bell. A topological framework for the interactive exploration of large scale turbulent combustion. In *Proc. of IEEE eScience*, 2009.
- [5] P. Bremer, G. Weber, J. Tierny, V. Pascucci, M. Day, and J. Bell. Interactive exploration and analysis of large scale simulations using topology-based data segmentation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2011.
- [6] T. Bridel-Bertomeu, B. Fovet, J. Tierny, and F. Vivodtzev. Topological Analysis of High Velocity Turbulent Flow. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization (posters)*, 2019.
- [7] H. Carr, J. Snoeyink, and M. van de Panne. Simplifying flexible isosurfaces using local geometric measures. In *IEEE VIS*, 2004.
- [8] F. Chazal, L. Guibas, S. Oudot, and P. Skraba. Persistence-based clustering in Riemannian manifolds. *Journal of the ACM*, 2013.
- [9] F. Chazal and J. Tierny. Topological data analysis, online class. <http://lip6.fr/Julien.Tierny/topologicalDataAnalysisClass.html>.
- [10] F. Chen, H. Obermaier, H. Hagen, B. Hamann, J. Tierny, and V. Pascucci. Topology analysis of time-dependent multi-fluid data using the reeb graph. *Computer Aided Geometric Design*, 2013.
- [11] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. Stability of persistence diagrams. In *Symp. on Comp. Geom.*, 2005.
- [12] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and D. Morozov. Vines and vineyards by updating persistence in linear time. In *Symp. on Comp. Geom.*, 2006.
- [13] W. Contributors. Dynamic time warping. [https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic\\_time\\_warping](https://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_time_warping).
- [14] R. Cotsakis, J. Shaw, J. Tierny, and J. A. Levine. Implementing Persistence-Based Clustering of Point Clouds in the Topology ToolKit. In *TopoInVis Book*, 2020.
- [15] H. Doraiswamy, J. Tierny, P. J. S. Silva, L. G. Nonato, and C. Silva. TopoMap: A 0-dimensional Homology Preserving Projection of High-Dimensional Data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2020.
- [16] H. Edelsbrunner and J. Harer. *Computational Topology: An Introduction*. American Mathematical Society, 2009.
- [17] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Disc. Compu. Geom.*, 2002.
- [18] M. Falk, C. Garth, C. Gueunet, J. A. Levine, J. Lukaszczuk, J. Tierny, and J. Vidal. Topological Data Analysis Made Easy with the Topology ToolKit, What is New? In *Proc. of IEEE VIS Tutorials*, 2020. <https://topology-tool-kit.github.io/ieeeVisTutorial.html>.
- [19] G. Favelier, C. Gueunet, and J. Tierny. Visualizing ensembles of viscous fingers. In *IEEE SciVis Contest*, 2016.
- [20] R. Forman. A user's guide to discrete Morse theory. *Adv. in Math.*, 1998.
- [21] D. Guenther, R. Alvarez-Boto, J. Contreras-Garcia, J.-P. Piquemal, and J. Tierny. Characterizing molecular interactions in chemical systems. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2014.
- [22] D. Guenther, J. Salmon, and J. Tierny. Mandatory critical points of 2D uncertain scalar fields. *Computer Graphics Forum (Proc. of EuroVis)*, 2014.
- [23] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Contour forests: Fast multi-threaded augmented contour trees. In *IEEE LDAV*, 2016.
- [24] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Merge Trees with Fibonacci Heaps. In *IEEE LDAV*, 2017.
- [25] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Contour Trees with Fibonacci Heaps. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2019. Accepted.
- [26] C. Gueunet, P. Fortin, J. Jomier, and J. Tierny. Task-based Augmented Reeb Graphs with Dynamic ST-Trees. In *Eurographics Symposium on Parallel Graphics and Visualization*, 2019.
- [27] A. Gyulassy, P. Bremer, R. Grout, H. Kolla, J. Chen, and V. Pascucci. Stability of dissipation elements: A case study in combustion. *Computer Graphics Forum (Proc. of EuroVis)*, 2014.
- [28] A. Gyulassy, P. T. Bremer, B. Hamann, and V. Pascucci. A practical approach to morse-smale complex computation: Scalability and generality. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2008.
- [29] A. Gyulassy, D. Guenther, J. A. Levine, J. Tierny, and V. Pascucci. Conforming morse-smale complexes. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2014.
- [30] L. Kantorovich. On the translocation of masses. *AS URSS*, 1942.
- [31] J. Kasten, J. Reininghaus, I. Hotz, and H. Hege. Two-dimensional time-dependent vortex regions based on the acceleration magnitude. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2011.
- [32] M. Kerber, D. Morozov, and A. Nigmatov. Geometry helps to compare persistence diagrams. *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 22, 2016. Article No. 1.4.
- [33] D. E. Laney, P. Bremer, A. Mascarenhas, P. Miller, and V. Pascucci. Understanding the structure of the turbulent mixing layer in hydrodynamic

- instabilities. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2006.
- [34] J. Lukaszczuk, G. Aldrich, M. Steptoe, G. Favelier, C. Gueunet, J. Tierny, R. Maciejewski, B. Hamann, and H. Leitte. Viscous fingering: A topological visual analytic approach. In *Physical Modeling for Virtual Manufacturing Systems and Processes*, 2017.
- [35] P.-F. Marteau. Time warp edit distance with stiffness adjustment for time series matching. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 31(2):306–318, 2008.
- [36] Mathieu Pont, Jules Vidal, Julie Delon, Julien Tierny. Wasserstein Distances, Geodesics and Barycenters of Merge Trees – Curated Data. <https://github.com/MatPont/WassersteinMergeTreesData>, 2021.
- [37] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton U. Press, 1963.
- [38] G. Monge. "mémoire sur la théorie des déblais et des remblais". *Académie Royale des Sciences de Paris*, .
- [39] D. Morozov. Dionysus. <http://www.mrzv.org/software/dionysus>, 2010. Accessed: 2016-09-15.
- [40] M. E. Munich and P. Perona. Continuous dynamic time warping for translation-invariant curve alignment with applications to signature verification. In *Proc. of ICCV*, 1999.
- [41] MyWhyU. A humorous look at the topology of curved space. <https://www.youtube.com/watch?v=p2ofJPh2yMw&list=PL09E9E697F585A58C>.
- [42] M. Olejniczak, A. S. P. Gomes, and J. Tierny. A Topological Data Analysis Perspective on Non-Covalent Interactions in Relativistic Calculations. *International Journal of Quantum Chemistry*, 2019.
- [43] V. Pascucci, X. Tricoche, H. Hagen, and J. Tierny. *Topological Methods in Data Analysis and Visualization: Theory, Algorithms and Applications*. Springer, 2010.
- [44] M. Pont, J. Vidal, J. Delon, and J. Tierny. Wasserstein Distances, Geodesics and Barycenters of Merge Trees. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2021.
- [45] S. Popinet. Gerris: A tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. *J. Comp. Phys*, 190:572–600, 2003.
- [46] G. Reeb. Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique. *Acad. des Sci.*, 1946.
- [47] H. Saikia and T. Weinkauff. Global feature tracking and similarity estimation in time-dependent scalar fields. *Computer Graphics Forum (Proc. of EuroVis)*, 2017.
- [48] E. Santos, J. Tierny, A. Khan, B. Grimm, L. Lins, J. Freire, V. Pascucci, C. Silva, S. Klasky, R. Barreto, and N. Podhorszki. Enabling advanced visualization tools in a web-based simulation monitoring system. In *Proc. of IEEE eScience*, 2009.
- [49] N. Shivashankar, P. Pranav, V. Natarajan, R. van de Weygaert, E. P. Bos, and S. Rieder. Felix: A topology based framework for visual exploration of cosmic filaments. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2016. <http://vgl.serc.iisc.ernet.in/felix/index.html>.
- [50] M. Soler, M. Petitfrere, G. Darche, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Ranking Viscous Finger Simulations to an Acquired Ground Truth with Topology-Aware Matchings. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization*, 2019.
- [51] M. Soler, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Lifted Wasserstein matcher for fast and robust topology tracking. In *Proc. of IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization*, 2018.
- [52] M. Soler, M. Plainchault, B. Conche, and J. Tierny. Topologically controlled lossy compression. In *Proc. of IEEE PacificViz*, 2018.
- [53] T. Sousbie. The persistent cosmic web and its filamentary structure: Theory and implementations. *Royal Astronomical Society*, 2011. <http://www2.iap.fr/users/sousbie/web/html/indexd41d.html>.
- [54] J. Tierny. Introduction to topological data analysis. <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01581941/file/manuscript.pdf>.
- [55] J. Tierny. *Topological Data Analysis for Scientific Visualization*. Springer, 2018.
- [56] J. Tierny and H. Carr. Jacobi fiber surfaces for bivariate Reeb space computation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2016.
- [57] J. Tierny, J. Daniels, L. G. Nonato, V. Pascucci, and C. Silva. Interactive quadrangulation with Reeb atlases and connectivity textures. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2012.
- [58] J. Tierny, G. Favelier, J. A. Levine, C. Gueunet, and M. Michaux. The Topology ToolKit. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2017. <https://topology-tool-kit.github.io/>.
- [59] J. Tierny, D. Guenther, and V. Pascucci. Optimal general simplification of scalar fields on surfaces. In *Topological and Statistical Methods for Complex Data*. Springer, 2014.
- [60] J. Tierny, A. Gyulassy, E. Simon, and V. Pascucci. Loop surgery for volumetric meshes: Reeb graphs reduced to contour trees. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2009.
- [61] J. Tierny and V. Pascucci. Generalized topological simplification of scalar fields on surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2012.
- [62] TTK Contributors. TTK Data. <https://github.com/topology-tool-kit/ttk-data/tree/dev>, 2020.
- [63] K. Turner, Y. Mileyko, S. Mukherjee, and J. Harer. Fréchet Means for Distributions of Persistence Diagrams. *Disc. Compu. Geom.*, 2014.
- [64] J. Vidal, J. Budin, and J. Tierny. Progressive Wasserstein Barycenters of Persistence Diagrams. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (Proc. of IEEE VIS)*, 2019.
- [65] J. Vidal, P. Guillou, and J. Tierny. A Progressive Approach to Scalar Field Topology. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2021.
- [66] J. Vidal and J. Tierny. Fast Approximation of Persistence Diagrams with Guarantees. In *IEEE Symposium on Large Data Analysis and Visualization*, 2021.
- [67] A. Vintescu, F. Dupont, G. Lavoué, P. Memari, and J. Tierny. Conformal factor persistence for fast hierarchical cone extraction. In *Eurographics (short papers)*, 2017.
- [68] Wikipedia. Betti numbers. [https://en.wikipedia.org/wiki/Betti\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Betti_number).
- [69] Wikipedia. ParaView. <https://en.wikipedia.org/wiki/ParaView>.